

境界の曲げ剛性を考慮した膜構造の形状解析

安宅 信行

On the shape finding analysis of membrane structures considering the bending stiffness of boundary frames

Nobuyuki Ataka

The paper describes the shape finding analysis of membrane structures considering the bending stiffness of boundary frames. The aim of this paper is to release the freedom of deciding the shape of membrane surface more in designing membrane structures. As a concrete example, I study the structure of umbrella possessing a flexible frame like the same time. This example will enable to solve the shape finding analysis of the membrane structure which have boundaries of stressed beam and curved beam with initial bending.

Keywords : Membrane Structure, Initial Stress, Initial Bending, Flexible Boundary.

1 はじめに

これまで膜構造では剛な境界の骨組膜構造やケーブル境界のサスペンション膜構造の形状解析問題がおもに論じられている。これらは固定された境界あるいはケーブル境界と膜面に作用する初期応力の釣合から曲面形状を決定する問題で、初期応力が等応力の場合には極小曲面問題に帰着される。これらの問題は境界条件が決定されれば一意的に決定され、このことが力学的には興味のあることではあるが、意匠設計上は曲面形状の選択の上でかなり制限を受ける。すなわち、ケーブルや膜のような強度的には十分でも、剛性のない材質に対し、構造物の形態は力学的な釣合の下で安定し、その形態だけが実現可能となるから、設計の自由度は極めて制限される。

一方、十分な曲げ剛性と強さを有する材質に

対して、構造物の形態はほぼ完全に自由に決めることができ、設計の自由度は極めて高いといえる。

ここでは、意匠設計における形態決定の自由度を少しでも広げるために曲げ材をともなう膜構造物の形状解析について述べる。具体的には、傘の構造に見られるようなフレキシブルな骨組みと一体化される膜構造の形状解析について考察する。これはまた、張弦ばりや初期曲げを受ける曲線ばりを境界とする膜構造の形状解析問題にも適用可能である。

2 解析の方針

2.1 使用プログラムの特徴

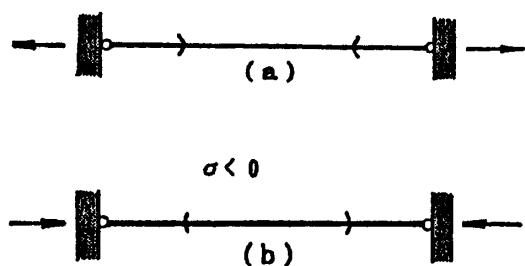
文献(6)に示す理論に基づいてプログラミングされた膜構造の形状解析と応力/変形解析を同一のルーチンで行えるプログラムを用いて解

析を進める。このプログラムの特徴は次の通りである。

- (1) 線要素, 3角形要素, 3角形6節点要素, 4角形要素, 4角形8節点要素を自由に選択できること
- (2) 構成則は線形弾性体と0次弾性体およびその連成(初期応力問題)の解析が可能である。(0次弾性体については Appendix 参照, 以下同じ)
- (3) 変位/ひずみの関係はグリーンのひずみテンソルを用いている。
- (4) 張力導入は0次弾性体の要素とひずみ指定による。
- (5) 非線形方程式はニュートン・ラフソン法を用いている。
- (6) ソルバーはブロックスカイライン法により NEC-PC 98系で解いている。

2. 2 構造のモデル化

- (1) 骨組膜構造に対しては従来のように境界点は固定点として扱い, 膜面は0次弾性膜とし, 初期応力に見合うように0次弾性係数を指定し, 形状解析を行なう。
- (2) ケーブル境界のサスペンション膜構造については境界に線形弾性体の線材を用い, 膜面は(1)と同様に0次弾性膜として形状解



析を行なう。

- (3) 以上のモデル化はこれまでもよく行なわれてきたことである。ここではこれに加えて境界に曲げ部材を配置することを考える。この曲げ材は曲げ要素を用いるのではなく, すでに導入されている平面要素(線形弾性体の面内応力要素)を用いることにより曲げ要素の効果を表現しようとするものである。これにより, これまでのプログラムを少しも変更することなく曲げ部材をとまなう膜構造の形状解析が可能となる。ただし, 曲げ材のねじれなどを問題にするときにはソリッド要素を導入した方がよいと思われるが, とりあえず, ここでは平面要素を用いる。

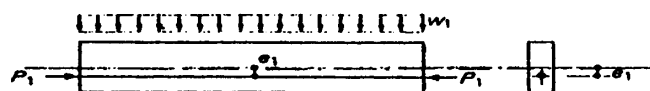
3 単一材の初期曲げ問題

3. 1 曲げモーメントの導入

- (1) 部材軸に沿って一様な初期曲げモーメントを導入するには, 部材が直線状である場合には中立軸より一定の偏心位置に軸力(荷重)を加えることにより容易にできるが, 変形後のことや初めから曲がったはりを考えるときには, 一様な曲げモーメントの導入は施工技術の面では可能であっても解析的には難しかった。しかし, 0次弾性体の

0次弾性体の直線棒

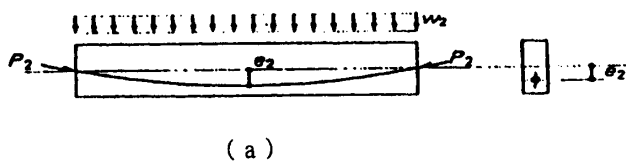
(a)(b)に示すような両端を留めた0次弾性体の直線部材は直線を保ちながら両端で反力を生じる。(a)は張力導入した状態であり, (b)は圧縮力を導入したことに相当する。このことは2点間に力を加えることは, その間をその力に見合う剛性を持った「0次弾性体」の構造部材(メンバー)で緊結したことに相当する。



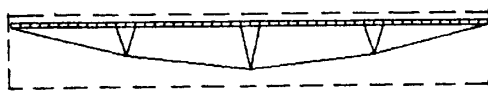
直線配置

ケーブル要素の導入によって、これが極めて容易に行なうことができる。すなわち、中立軸よりも一定の偏心位置に軸に沿って0次弾性体のケーブル要素を配置することによって初期曲げモーメントを受けるはりをモデル化することができる。なお、偏心軸力は引張力および圧縮力のいずれの場合も考えられる。

- (2) 部材軸に沿う任意(可変)の初期曲げモーメントの導入は、(1)の場合を考慮すると、一定の軸力に対し、偏心距離を変えること



(a)



(b)

曲線配置 (a) 図はポストストレスドコンクリートで軸線に沿って偏心距離を変化している、このようにして導入する曲げモーメントを変化させている。

(b) 図は張弦ばりであるが、外周を囲んでいる点線のボックス型のはりと考えると (a) の場合とおなじであることがわかる。

により、解析的にも、また、施工的にも実現できる。この実例としてはポストストレスドコンクリートのはりなどに見ることができる。張弦ばりは材に加わる圧縮力をできるだけ抑え、大きな初期曲げ効果を得るために偏心距離を大きくし、その結果、テンション材がはりの外にでてきたと考えることもできる。

3. 2 初期曲げモーメントを受けるはりの数値解析

ここでは線形弾性体の平面要素を用いたはりのモデルと通常のはり理論とを比較し、その妥当性を検討する。

- (1) 初等はり理論ではオイラー・ベルヌイの仮定(平面保持)のもとに曲率と曲げモーメントの間には次の式が成り立つ。

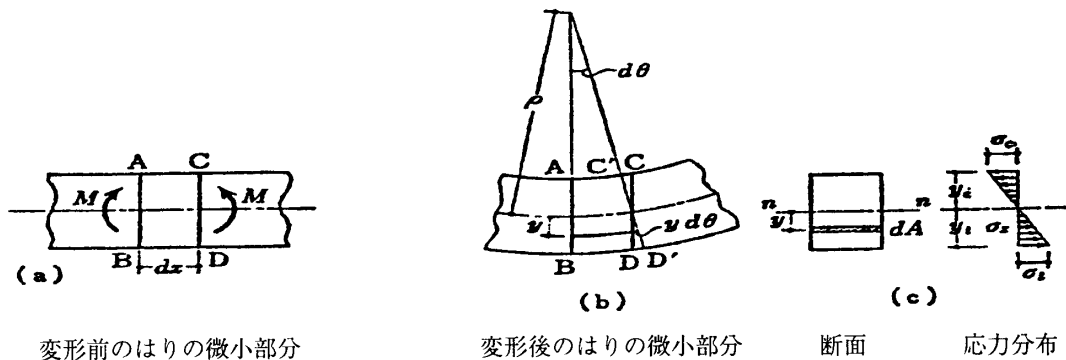
$$1/\rho = \pm M/EI \quad (1)$$

ここに、 $1/\rho$: 曲率 ρ : 曲率半径
 M : 曲げモーメント E : ヤング係数
 I : 断面2次モーメント

曲率を $x-y$ 座標系のもとで表現すると

$$1/\rho = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (2)$$

ここで、微小変形の仮定のもとに曲率が次のように表現される。



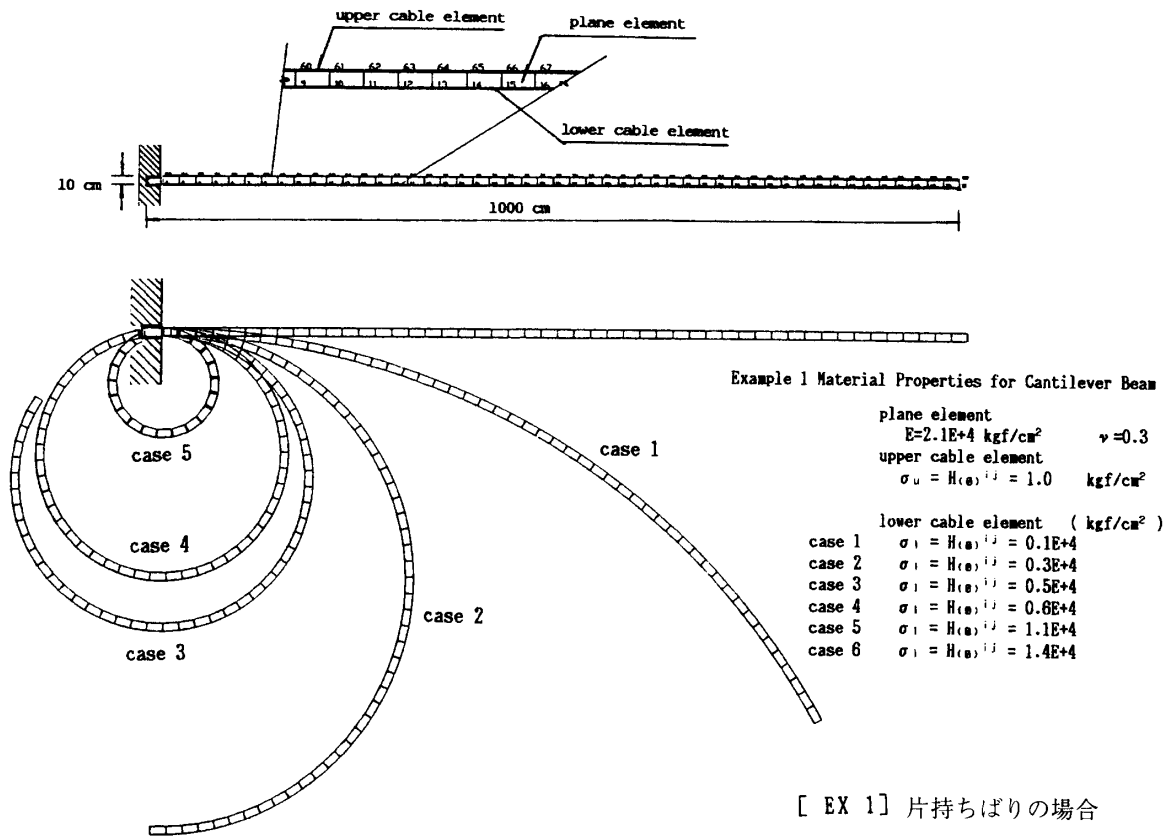
変形前のはりの微小部分

変形後のはりの微小部分

断面

応力分布

境界の曲げ剛性を考慮した膜構造の形状解析



[EX 1] 片持ちばりの場合

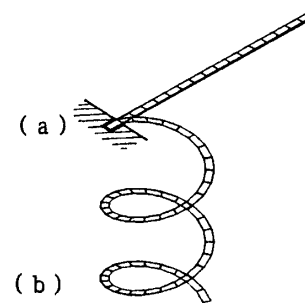
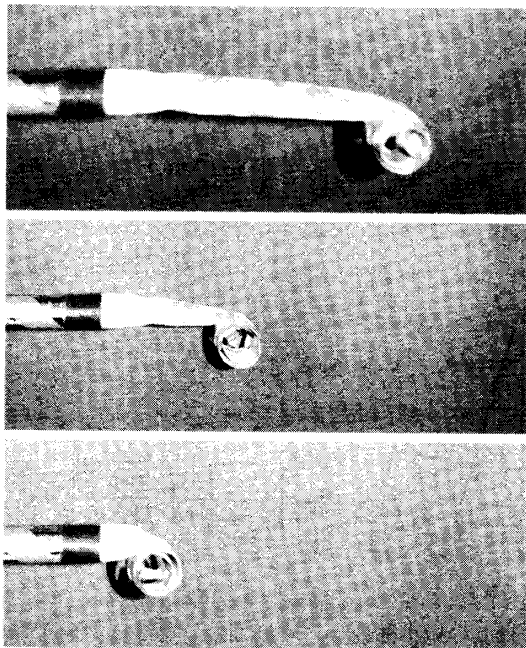


写真 (a) 写真は夜店で売られている吹くと伸びるおもちゃである。これはこの紙風船の下端ピアノ線のバネが用いられている。このバネ定数が大きいと円弧状に巻き込む。これは丁度、図 [EX 1] の case 5 に似ている。case 6 は図 [EX 1] の case 5 を分かりやすくするためにz方向の座標値を入れて表現したものである。

写真

$$1/\rho \doteq d^2y/dx^2 \quad (3)$$

これより、弾性方程式

$$d^2y/dx^2 = \pm M/EI \quad (4)$$

が導かれる。これは線形方程式であり、解は容易に得られる。曲げモーメントを受けるはりのたわみ（変形）を求めるのに用いられることは周知の事実である。

さて、ここでは微小変形の仮定をせず、(1)式において曲げ剛性（EI）を一定にし、さらに、曲げモーメント（M）を一様な曲げモーメントを仮定すれば曲率（ $1/\rho$ ）は一定となり、はりが円弧状をなすことを意味しており、このことを数値解析で検証する。

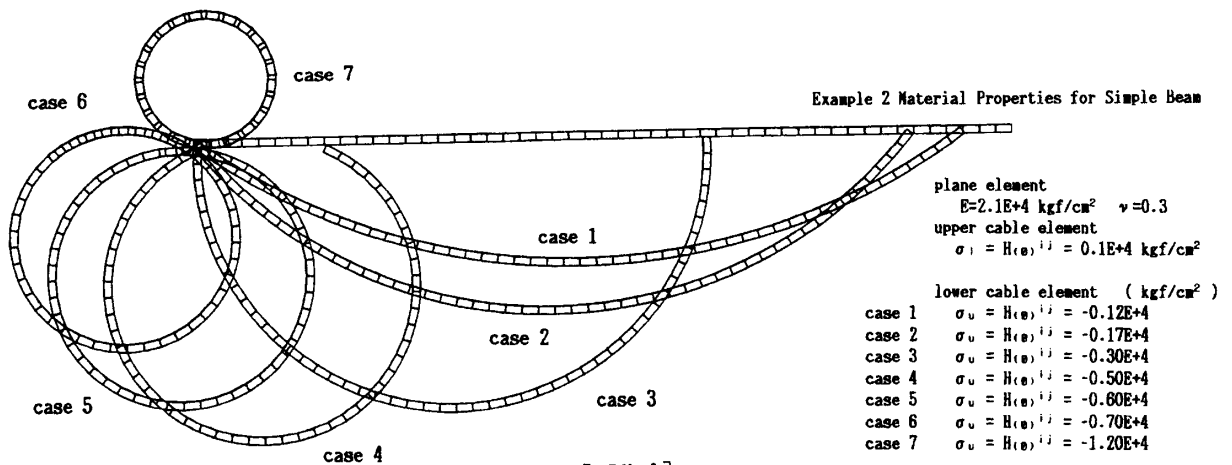
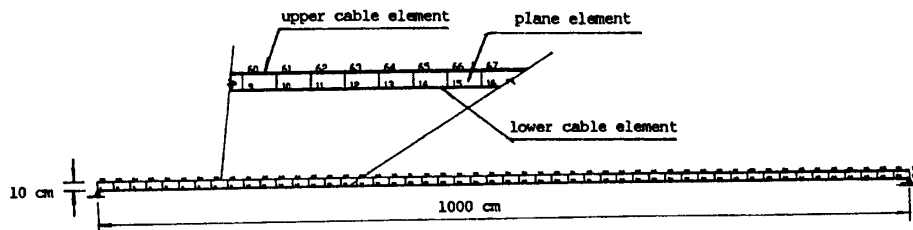
(2) 片持ちばりの場合

数値解析に用いるはりのモデルは、図（EX1）に示すように、上下にケーブル要素を、また中央に平面要素を持つようなx-y平面上のはりを考える。

平面要素は材質的には線形弾性体とし、上あるいは下のケーブルは0次弾性体で構成されているものとする。0次弾性係数はプラス（正）の時には初期応力が引張り状態であることを示しており、マイナス（負）の時には初期応力が圧縮状態にあることを示しており、いずれの場合も指定することが出来る。

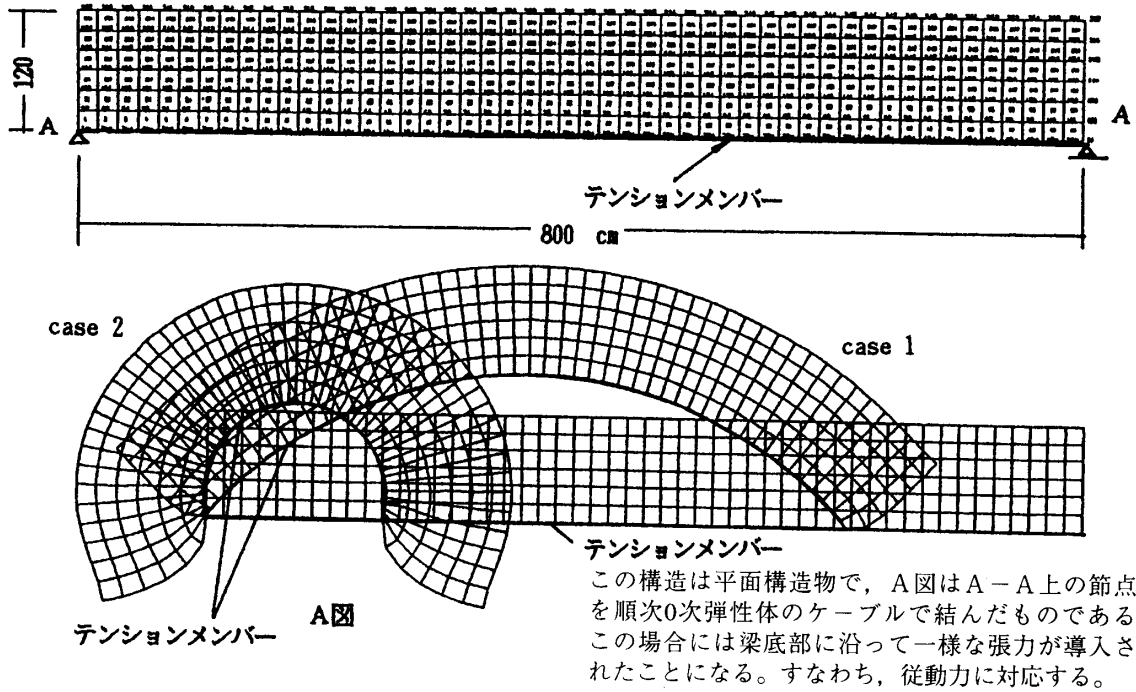
(3) 単純支持ばりの場合

(a) は片持ちばりに使われたはりの境界条



[EX 2]

単純支持ばり



Example 3 Material Properties for Simple Beam

plane element
thickness $t=1.0\text{cm}$
 $E=2.1\text{E}+4 \text{ kgf/cm}^2 \quad \nu=0.3$

cable element (kgf/cm²)
sectional area $A=1.0\text{cm}^2$
case 1 $\sigma u = H(0)_{ij} = 1.0\text{E}+4$
case 2 $\sigma u = H(0)_{ij} = 1.0\text{E}+5$

件を変えて、単純ばりとした例である。この場合には下側のケーブルに圧縮力を指定している。平面要素の板厚は片持ちばりの場合と同じ 1cm で、ケーブルの断面積は 1cm² である。

(b) はメッシュを六段に重ねた平面要素から構成されるはり成の高いはりである。この場合にも、はりの下端には0次弾性体のケーブル要素を取り付けてある。この0次弾性係数(初期応力に相当)を変化させることによって(a)と同じような結果がえられる。

4 曲げ部材をともなう膜構造の形状解析

曲げ部材をともなう膜構造、ここでは傘のようなものをイメージした構造物の形状解析を行なう。弾性骨組みとしては単一ばりとしてこれまでに考えられてきた上端、下端に0次弾性体のケーブルを配置している。これは必要に応じ

て0次弾性係数(初期応力)を変化させ、形状に変化を与えようとするものである。

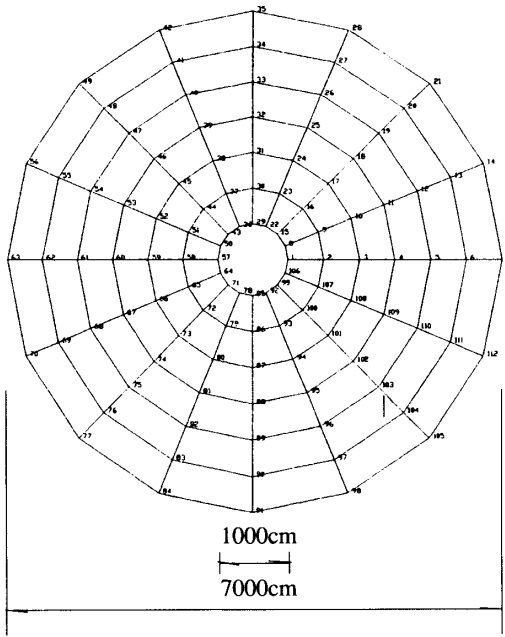
構造は直径70m、中央に直径10mの円形の開口部をもち、開口部と周辺境界はケーブル境界とし、弾性骨組みとしてはb図にあるように8

本の骨組みを持っている。境界条件はc図に示し、骨組みのディテールはd図に示す。

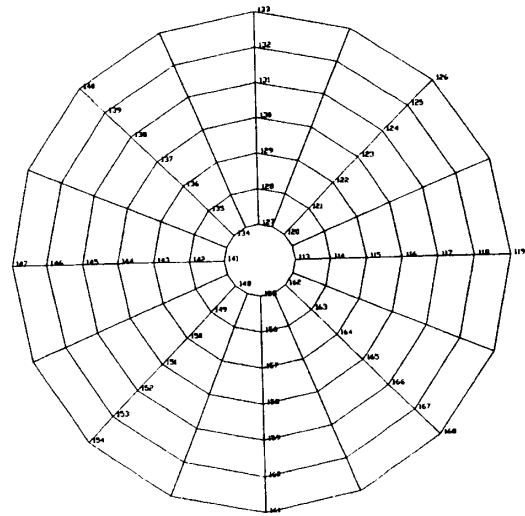
解析はc図に示すような、初期において平面状の点を周辺境界をピン支持とし、開口部拘束点を1300cm強制変形し、中央拘束点に1節点当り20000kgfの集中荷重を与える。A系列図は骨組みの曲げ剛性が高い場合であり、B系列図は曲げ剛性を低く抑えた場合である。

この結果から曲げ部材の剛性を変化させることによって、同じ初期条件からスタートしても外感的にかなり異なった形態が得られる。このように曲げ部材を用いた形状解析が可能である。

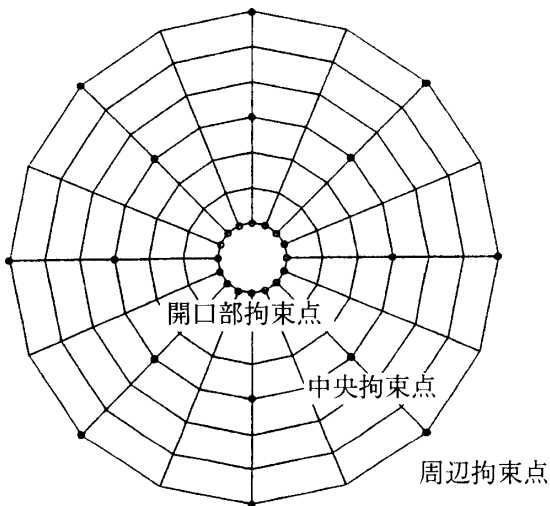
境界の曲げ剛性を考慮した膜構造の形状解析



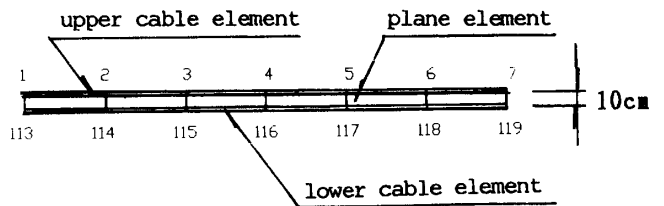
(a) メッシュ分割と節点番号



(b) 曲げ部材配置と節点番号



(c) 拘束点配置図



(d) 曲げ部材の構成と節点番号の付け方

Exmpl 4 Properties for Membrane Structures (type A)

plane element of membrane (kgf/cm²)

$$\sigma_1 = H_{(0)ij} = 0.2E+2$$

plane element of beam

$$E=2.1E+4 \text{ kgf/cm}^2 \quad \nu=0.3$$

upper and lower cable element

$$\sigma_u = H_{(0)ij} = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$$

cable element of inner and outer circle

$$E=2.1E+6 \text{ kgf/cm}^2$$

Exmpl 5 Properties for Membrane Structures (type B)

plane element of membrane (kgf/cm²)

$$\sigma_1 = H_{(0)ij} = 0.2E+2$$

plane element of beam

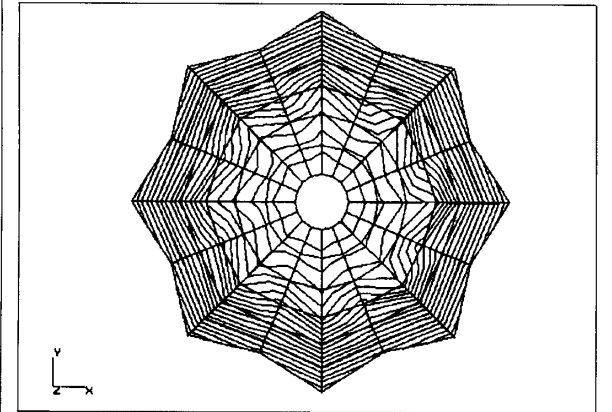
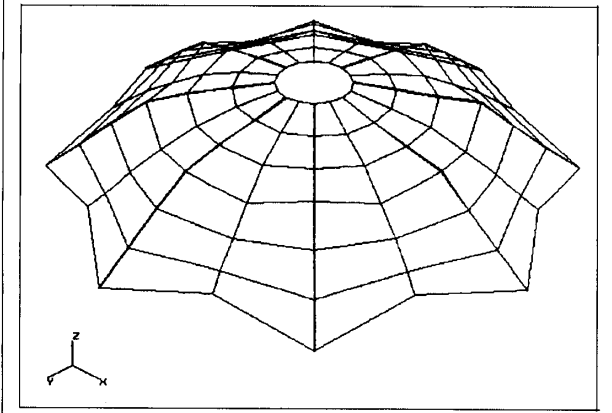
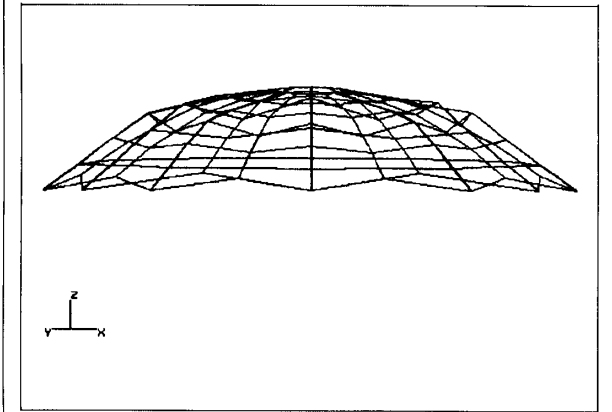
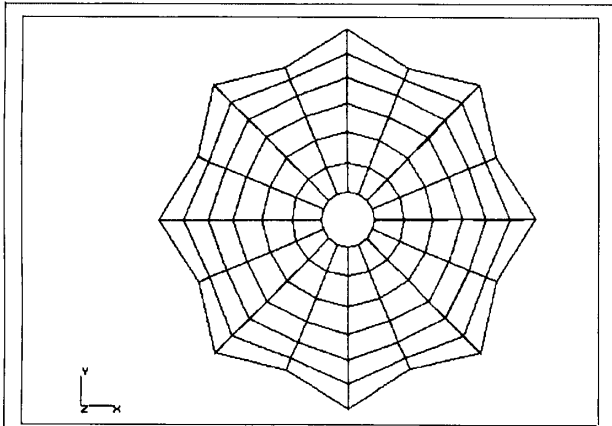
$$E=2.1E+3 \text{ kgf/cm}^2 \quad \nu=0.3$$

upper and lower cable element

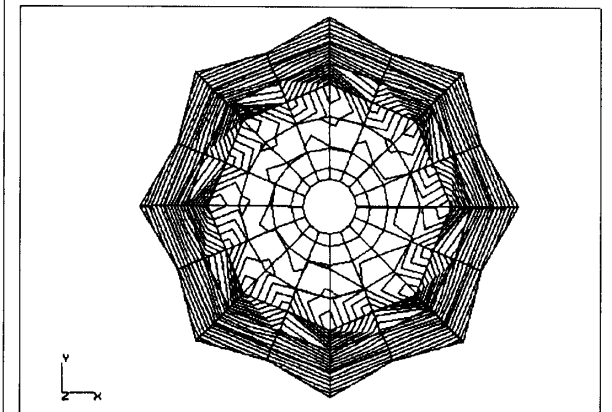
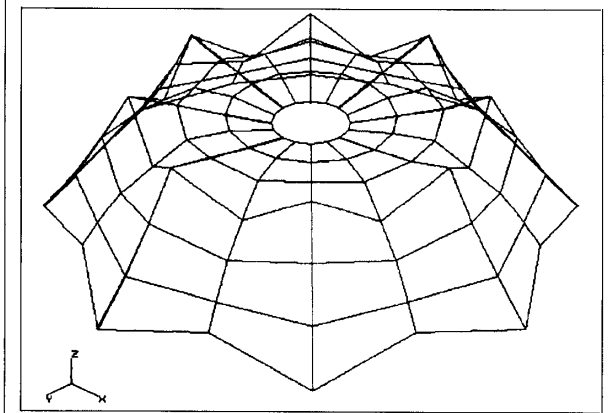
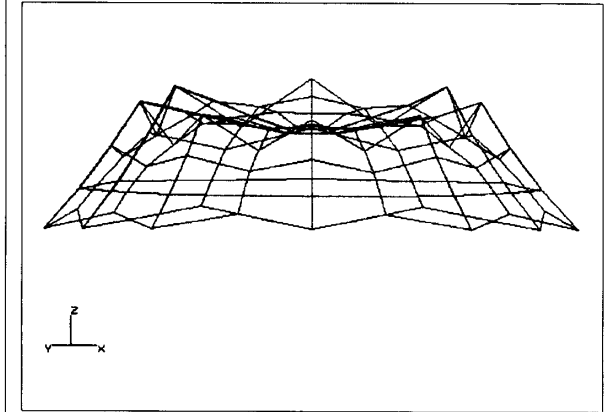
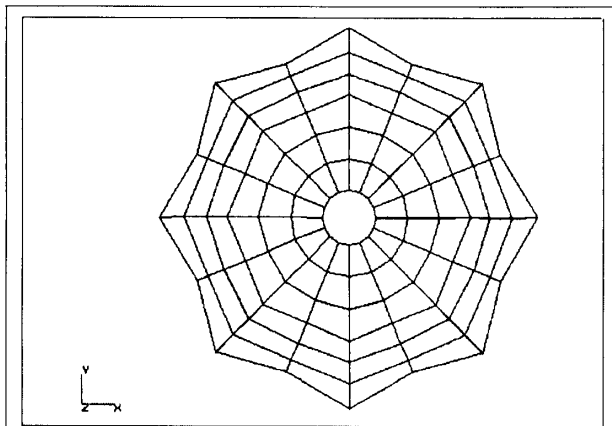
$$\sigma_u = H_{(0)ij} = 1.0 \text{ kgf/cm}^2$$

cable element of inner and outer circle

$$E=2.1E+6 \text{ kgf/cm}^2$$



Exempl 4 (type A)



Exempl 5 (type B)

5 まとめ

- (1) これまでのプログラムを変えることなく曲げ材をとまなう膜構造の形状解析が可能である。ただし、さらに複雑な形状のものを扱うためにはソリッド要素を導入した方がよいと思われる。
- (2) 曲げ部材を考慮することにより設計の自由度はかなり広がると思われる。
- (3) ここで示したようにはり材の上下端に0次弾性体のケーブル要素を配置しこれらのケーブルを適宜緊張させることにより曲げ材に初期曲げを与え様々な形態を創り出すことができる。さらに、これらの配置や偏心距離を変えることにより、複雑な形態を創造できる。
- (4) 0次弾性係数は正でも負でもよいので、これらの要素を適宜配することによって適切な曲げモーメントの分布が可能である。

..... Appendix

ここで記述している0次弾性体については文献(3)で定義してあるがここに要約しておく。

0次弾性体とは流体を一般化した材質的な概念で構成方程式が次式で定義される連続体をいう。

$$\tau^{ij} = h^{ij} \quad (A1)$$

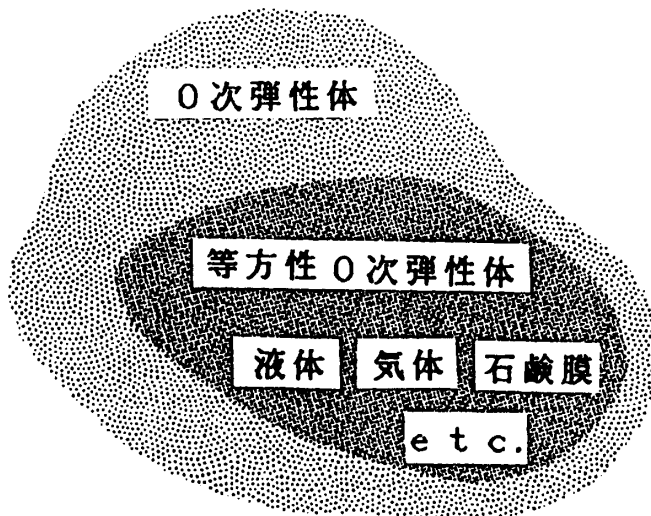
ここに、 τ^{ij} は応力、 h^{ij} は0次弾性係数である。この中で、次のように記述される時、これを流体という。

$$h^{ij} = p G^{ij} \quad (A2)$$

ここに、 p は通常の圧力に相当する定数で、 G^{ij} は一般曲線座標系での反変基本計量テンソルである。これを直交座標系で表現すれば

$$h^{ij} = p \delta^{ij} \quad (A3)$$

ここに、 δ^{ij} はクロネッカーのデルタを意味している。このように連続体が三次元的に定義されれば、この二次元（平面）および一次元（線材）の場合も考えることができる。二次元的なものとしては石鹸膜がこの範疇に含まれる。



0次弾性体の材質的なグループを模式的に表現したもので、気体や液体など流体を等方性の0次弾性体として包括する材質的な概念である。0次弾性係数としては引張り状態を示す正の場合と圧縮状態を示す負の場合とがある。また、一般には異方性の場合も考えられる。

REFERENCES

- 1) Haug, E. and Powell, G.H. : "Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures" IASS. Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames Tokyo and Kyoto. 1971
- 2) Ishii, K. : "Structural Design of Air-Supported Structure" Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National University. Vol.31 1982
- 3) 安宅信行 「テンション構造の形態の理論について」日本建築学会構造系論文報告集第395号 1. 1989
- 4) 安宅信行："連続体の力学と形態の理論について" シェルと空間構造に関する日・韓コロキウム 東京論文集 昭和62年7月
- 5) 安宅信行："膜構造の形状解析の線形理論について" 膜構造協会論文報告集 昭和62年
- 6) 安宅信行："構造における形態の理論について"昭和女子大学大学院生活機構研究科紀要 vol.4 1995
- 7) Eringen A.C. : "Nonlinear Theory of Continuous Media" McGraw-Hill. 1962
- 8) Green A.E. and Zerna W. : "Theoretical Elasticity" Oxford Press 1954
- 9) Oden J.T. : "Finite Elements of Nonlinear Continua " McGraw-Hill 1972
- 10) Washizu K. : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity" Pergamon Press 3rd ed. 1982
- 11) 鈴木俊男 半谷裕彦："等張力曲面形状の数値解析" 膜構造研究論文集 1989
- 12) 鈴木俊男 "張力曲面構造の曲面形状に関する解析的研究" 東京大学学位請求論文 1992
- 13) 大森博司 萩原伸幸 松井徹哉 松岡理："張力構造に関する基礎的考察(極小曲面の数値解析)" 第2回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム論文集
- 14) 大森博司 萩原伸幸 松井徹哉 松岡理："有限要素法による極小曲面の数値解析" 膜構造研究論文集 1988
- 15) 本間俊雄 谷口弘子："ステアリング的機能を考慮した膜構造の初期設計支援可視化システム" NICOGRAPH 論文集 1993
- 16) 石井一夫："膜構造の形状解析(形状決定の問題)概説" 膜構造研究論文集 1989
- 17) 石井一夫："膜構造の応力・変形解析概説" 膜構造研究論文集 1990
- 18) William Prager "Introduction to Mechanics of Continua" 1961
- 19) 正岡典夫 石井一夫："低次四辺形要素による形状解析について" 膜構造研究論文集 1990
- 20) 石原競 大森博司 八木孝憲："極小曲面の数値解析法に関する研究" 膜構造研究論文集 1993